

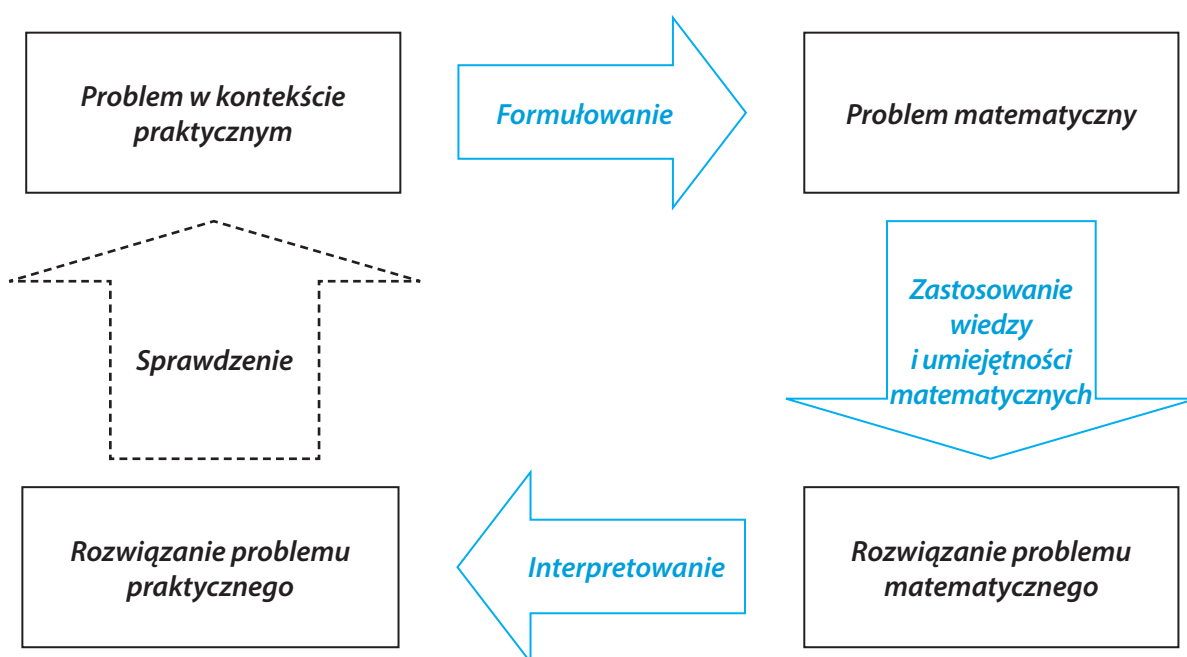
Matematyka – założenia teoretyczne (*mathematics framework*)¹

Celem badania PISA w zakresie matematyki jest określenie, w jakim stopniu uczniowie potrafią wykorzystać swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, gdy muszą się zmierzyć z koniecznością rozwiązywania problemów, przed jakimi stawia ich otaczający świat. Dlatego dobry wynik w badaniu PISA uzyskują uczniowie, którzy umieją rozumować matematycznie, a także potrafią skutecznie wykorzystywać pojęcia i narzędzia matematyczne do opisu, analizy i prognozowania różnych zjawisk. Nawet bardzo dobra, ale tylko teoretyczna znajomość narzędzi matematyki, jest w tym badaniu sprawą drugorzędną; przede wszystkim liczy się umiejętność zastosowania tych narzędzi w praktyce.

Założenia teoretyczne badania

Na schemacie 1 przedstawiono cykl rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym (*modelling cycle*), tak jak go zdefiniowano w dokumencie ramowym, opisującym założenia teoretyczne badania PISA 2018.

Schemat 1. Cykl rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym.



Wyróżniono tu trzy główne procesy:

- formułowanie – polega na matematyzacji problemu praktycznego, czyli na wyborze lub skonstruowaniu modelu matematycznego adekwatnego dla danej sytuacji praktycznej;
- zastosowanie wiedzy i umiejętności matematycznych – polega na rozwiązaniu problemu matematycznego za pomocą narzędzi i metod matematyki;
- interpretowanie – krytyczne odniesienie wyniku uzyskanego w obrębie matematyki do praktycznego kontekstu, w którym problem powstał.

¹ Na podstawie: OECD (2019) *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*, ISBN 978-92-64-47759-9, <https://doi.org/10.1787/b25e-fab8-en> opracowali Agnieszka Sułowska i Zbigniew Marciniak

Dokument ramowy wyróżnia również szereg umiejętności matematycznych, które uczeń wykorzystuje w opisanych powyżej procesach. Są to:

- umiejętności komunikacyjne,
- umiejętność użycia języka symboli, wzorów i operacji formalnych,
- umiejętność posługiwania się reprezentacjami,
- umiejętność matematyzowania,
- umiejętność myślenia strategicznego,
- umiejętność rozumowania i argumentacji,
- umiejętność wykorzystania narzędzi matematycznych.

Z punktu widzenia treści matematycznych każde zadanie zostało zaklasyfikowane do jednej z czterech dużych grup:

- przestrzeń i kształt – sytuacje geometryczne, związki przestrzenne,
- zmiana i związki – zależności funkcyjne oraz relacje,
- ilość – obliczenia, w tym zrozumienie sensu wykonywanych obliczeń; szacowanie i przybliżanie wielkości liczbowych,
- niepewność – zjawiska losowe, rozważania o charakterze statystycznym.

Każde zadanie matematyczne używane w badaniu PISA umieszczone jest w autentycznym kontekście praktycznym, który ma charakter osobisty, społeczny, zawodowy lub naukowy.

Pomiar kompetencji matematycznych

Badanie PISA jest przeprowadzane co trzy lata. W każdej edycji badania jedna z dziedzin jest główna, a pozostałe – poboczne. Matematyka była dziedziną główną w latach 2003 i 2012, natomiast w pozostałych edycjach badania, w latach 2006, 2009, 2015 i 2018, stanowiła dziedzinę poboczną. Dla dziedziny głównej przygotowuje się dodatkowy – bogaty i różnorodny – zestaw zadań, którym uzupełnia się zadania użyte w poprzedniej edycji badania. W kolejnych dwóch badaniach, gdy matematyka jest dziedziną poboczną, stosuje się wybrany podzbiór tego zestawu, tzw. zadania kotwiczące (wiążące), który pozwala na dokonywanie porównań wyników uzyskanych w kolejnych latach.

Poziomy umiejętności matematycznych

Dla lepszego objaśnienia uzyskanych wyników na skali matematycznej badania PISA wyróżniono sześć poziomów oraz podano typowe umiejętności uczniów, które plasują się na każdym z nich.

Tabela 1. Opis poziomów umiejętności matematycznych w badaniu PISA

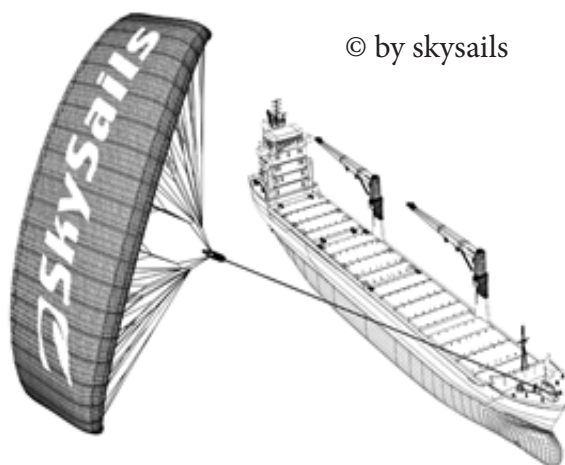
Poziom (dolna granica)	Umiejętności typowe dla danego poziomu umiejętności matematycznych
Poziom 6 669 pkt	Uczeń potrafi analizować i uogólniać informacje zgromadzone w wyniku zbadania samodzielnie zbudowanego modelu złożonej sytuacji problemowej. Umie połączyć informacje pochodzące z różnych źródeł i swobodnie przemieszczać się między nimi. Potrafi wykonywać zaawansowane rozumowania i umie wnioskować matematycznie. Umie połączyć rozumowanie z biegłością w wykonywaniu operacji symbolicznych i formalnych podczas twórczej pracy nad nowym dla siebie kontekstem. Potrafi precyzyjnie formułować komunikat o swoim rozumowaniu, uzasadniając podjęte działania.
Poziom 5 607 pkt	Uczeń umie modelować złożone sytuacje, identyfikując ograniczenia i precyzując zastrzeżenia. Potrafi porównywać, oceniać i wybierać odpowiednie strategie rozwiązywania problemów związanych ze zbudowanym modelem. Wykorzystuje dobrze rozwinięte umiejętności matematyczne, z użyciem odpowiednich reprezentacji, w tym symbolicznych i formalnych. Potrafi krytycznie ocenić swoje działania, zakomunikować swoją interpretację oraz sposób rozumowania.
Poziom 4 545 pkt	Uczeń umie efektywnie pracować z podanymi wprost modelami złożonych sytuacji realnych, identyfikując ograniczenia i czyniąc niezbędne założenia. Potrafi wybierać oraz łączyć informacje pochodzące z różnych źródeł, wiążąc je bezpośrednio z kontekstem realnym. Umie w takich kontekstach stosować ze zrozumieniem dobrze wyuczone techniki. Potrafi konstruować komunikaty opisujące swoje interpretacje, argumenty i działania.
Poziom 3 482 pkt	Uczeń umie wykonać jasno opisany algorytm, także wymagający sekwencyjnego podejmowania decyzji. Potrafi wybierać i stosować proste strategie rozwiązywania problemów. Potrafi interpretować i wyciągać bezpośrednie wnioski z danych pochodzących z kilku źródeł. Umie przedstawić wyniki nieskomplikowanych interpretacji i rozważań.
Poziom 2 420 pkt	Uczeń umie rozpoznać i zinterpretować sytuację wymagającą tylko prostego kojarzenia. Potrafi wydobyć istotną informację z pojedynczego źródła i użyć na raz jednej formy reprezentacji danych. Umie zastosować prosty wzór lub przepis postępowania. Potrafi wyciągnąć bezpośrednio wnioski i dosłownie zinterpretować wyniki.
Poziom 1 358 pkt	Uczeń umie rozwiązywać typowe zadania, w których wszystkie dane są bezpośrednio podane, a zadane pytania są proste. Potrafi wykonywać czynności rutynowe, postępując zgodnie z podanym prostym przepisem. Podejmuje działania oczywiste, wynikające wprost z treści zadania.
Poniżej poziomu 1	Uczeń wykazuje brak umiejętności nawet na poziomie 1.

Przykładowe zadania z matematyki

ŻAGLOWCE

Dziewięćdziesiąt pięć procent światowego handlu odbywa się drogą morską, wykorzystując w tym celu około 50 000 zbiornikowców, masowców i kontenerowców. Większość z tych statków towarowych używa paliwa okrętowego typu diesel.

Inżynierowie zamierzają opracować system wykorzystujący siłę wiatru do wspomaganie napędu statków towarowych. Proponują, aby wyposażyć statki w żagle latawcowe i wykorzystać siłę wiatru, dzięki czemu zmniejszy się zużycie paliwa i jego skutki dla środowiska.



Pytanie 1: ŻAGLOWCE

PM923Q01

Jedną z zalet żagla latawcowego jest to, że szybuje on na wysokości 150 m. Na tej wysokości prędkość wiatru jest o mniej więcej 25% większa niż na pokładzie statku.

Jaka jest przybliżona prędkość, z jaką wiatr dmie w żagiel wtedy, gdy na pokładzie statku prędkość wiatru wynosi 24 km/h?

- A 6 km/h
- B 18 km/h
- C 25 km/h
- D 30 km/h
- E 49 km/h

ŻAGLOWCE 1 – PUNKTACJA

Opis: Stosowanie obliczeń procentowych w rzeczywistej sytuacji

Treści matematyczne: Ilość

Kontekst: Naukowo-przyrodniczy

Proces: Zastosowanie

Łatwość: 512 punktów - poziom 3

Kredyt całkowity

Kod 1: D. 30 km/h

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

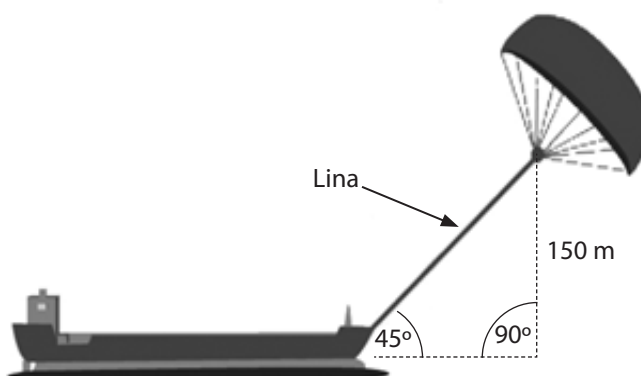
Kod 9: Brak odpowiedzi.

Pytanie 3: ŻAGLOWCE

PM923Q03

Jaka w przybliżeniu powinna być długość liny żagla latawcowego, by mógł on ciągnąć statek pod kątem 45° z wysokości 150 m w pionie, jak pokazano na rysunku obok?

- A 173 m
- B 212 m
- C 285 m
- D 300 m



ŻAGLOWCE 3 – PUNKTACJA

Opis: Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w rzeczywistym kontekście geometrycznym

Treści matematyczne: Przestrzeń i kształt

Kontekst: Naukowo-przyrodniczy

Proces: Zastosowanie

Łatwość: 538 punktów - poziom 3

Kredyt całkowity

Kod 1: B. 212 m

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

Kod 9: Brak odpowiedzi.

Pytanie 4: ŻAGLOWCE

PM923Q04 – 019

Ze względu na duże koszty paliwa okrętowego (0,42 zedów za liter), właściciele statku *Nowa Fala* zastanawiają się nad wyposażeniem go w żagiel latawcowy.

Szacuje się, że opisany żagiel latawcowy może potencjalnie zmniejszyć zużycie paliwa ogółem o około 20%.

Statek: Nowa Fala

Typ: frachtowiec

Długość: 117 metrów

Szerokość: 18 metrów

Ładowność: 12 000 ton

Maksymalna prędkość: 19 węzłów

Roczne zużycie paliwa bez żagla latawcowego: około 3 500 000 litrów



Wyposażenie statku *Nowa Fala* w żagiel latawcowy kosztuje 2 500 000 zedów.

Po mniej więcej ilu latach oszczędności na paliwie okrętowym pokryją koszty zainstalowania żagla? Podaj obliczenia, aby uzasadnić swoją odpowiedź.

.....
.....

Po ilu latach?.....

ŻAGLOWCE 4 – PUNKTACJA

Opis: Wybranie potrzebnych informacji i skorzystanie z wieloetapowego modelowania w skomplikowanej sytuacji rzeczywistej

Treści matematyczne: Zmiana i związki

Kontekst: Naukowo-przyrodniczy

Proces: Formułowanie

Łatwość: 702 punkty - poziom 6

Kredyt całkowity

Kod 1: Odpowiedzi w przedziale od 8 do 9 lat wraz z prawidłowymi obliczeniami.

Na przykład:

- Roczne zużycie paliwa bez żagla: 3,5 mln litrów, po cenie 0,42 zeda/litr, czyli koszt paliwa bez żagla to 1 470 000 zedów.

Jeśli dzięki żaglowi zaoszczędzi się 20% kosztów, da to oszczędność $1\,470\,000 \cdot 0,2 = 294\,000$ zedów rocznie.

$2\,500\,000 : 294\,000 = 8,5$, czyli dopiero po około 8-9 latach koszt żagla się zwróci.

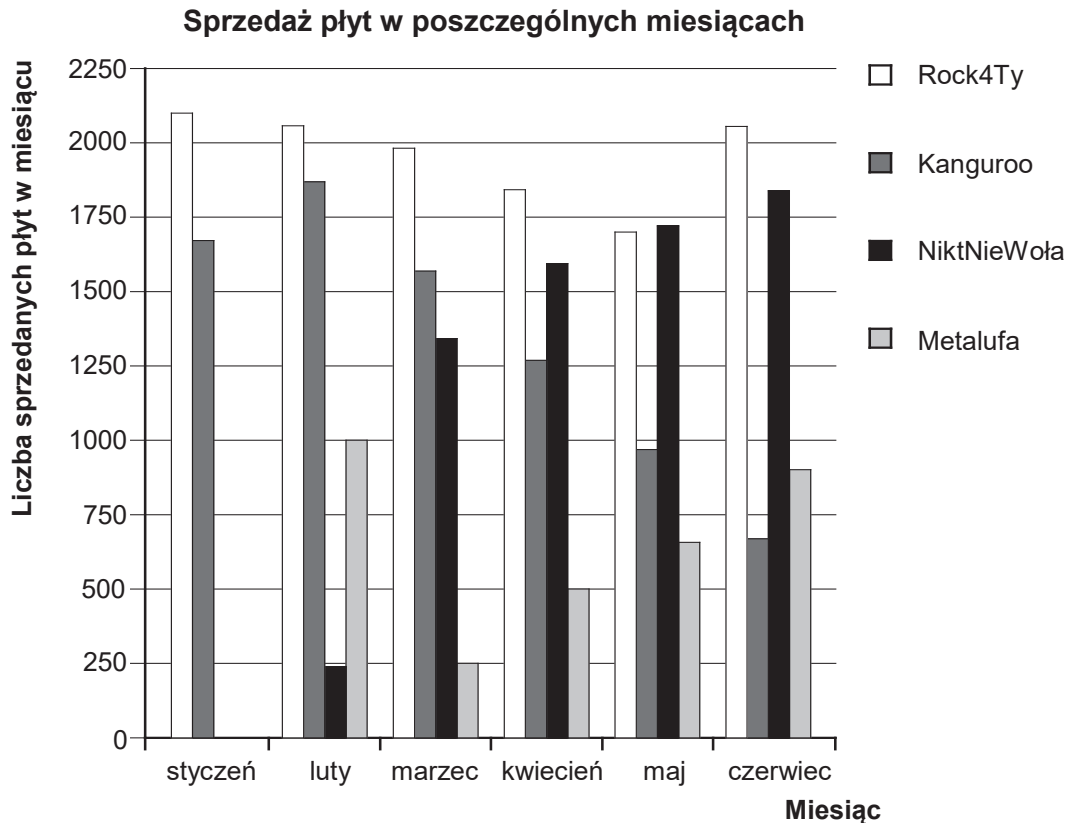
Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

Kod 9: Brak odpowiedzi.

LISTA PRZEBOJÓW

W styczniu ukazały się nowe płyty zespołów *Rock4Ty* i *Kanguroo*, a w lutym płyty zespołów *NiktNieWoła* i *Metalufa*. Poniższy diagram pokazuje sprzedaż płyt tych zespołów w okresie od stycznia do czerwca.



Pytanie 1: LISTA PRZEBOJÓW

PM918Q01

Ile płyt sprzedał zespół *Metalufa* w kwietniu?

- A 250
- B 500
- C 1000
- D 1270

LISTA PRZEBOJÓW 1 – PUNKTACJA

Opis: Odczytanie danych z wykresu słupkowego

Treści matematyczne: Niepewność

Kontekst: Społeczny

Proces: Interpretacja

Łatwość: 348 punktów - poziom poniżej 1

Kredyt całkowity

Kod 1: B. 500

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

Kod 9: Brak odpowiedzi.

Pytanie 2: LISTA PRZEBOJÓW**PM918Q02**

W którym miesiącu zespół *NiktNieWoła* sprzedał po raz pierwszy więcej płyt niż zespół *Kanguroo*?

- A** nie było takiego miesiąca
- B** w marcu
- C** w kwietniu
- D** w maju

LISTA PRZEBOJÓW 2 – PUNKTACJA

Opis: Odczytanie i zinterpretowanie danych z wykresu słupkowego

Treści matematyczne: Niepewność

Kontekst: Społeczny

Proces: Interpretacja

Łatwość: 415 punktów - poziom 1

Kredyt całkowity

Kod 1: C. w kwietniu

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

Kod 9: Brak odpowiedzi.

Pytanie 5: LISTA PRZEBOJÓW**PM918Q05**

Menedżer zespołu *Kanguroo* martwi się, bo liczba sprzedanych płyt tego zespołu spadała w okresie od lutego do czerwca.

Ile mniej więcej wyniesie sprzedaż płyt tego zespołu w lipcu, jeśli ta tendencja spadkowa się utrzyma?

- A** 70 płyt
- B** 370 płyt
- C** 670 płyt
- D** 1340 płyt

LISTA PRZEBOJÓW 5 – PUNKTACJA

Opis: Odczytanie i zinterpretowanie danych z wykresu słupkowego oraz oszacowanie liczby płyt, które zostaną sprzedane w przyszłości przy założeniu kontynuacji trendu liniowego

Treści matematyczne: Niepewność

Kontekst: Społeczny

Proces: Zastosowanie

Łatwość: 428 punktów - poziom 2

Kredyt całkowity

Kod 1: B. 370 płyt

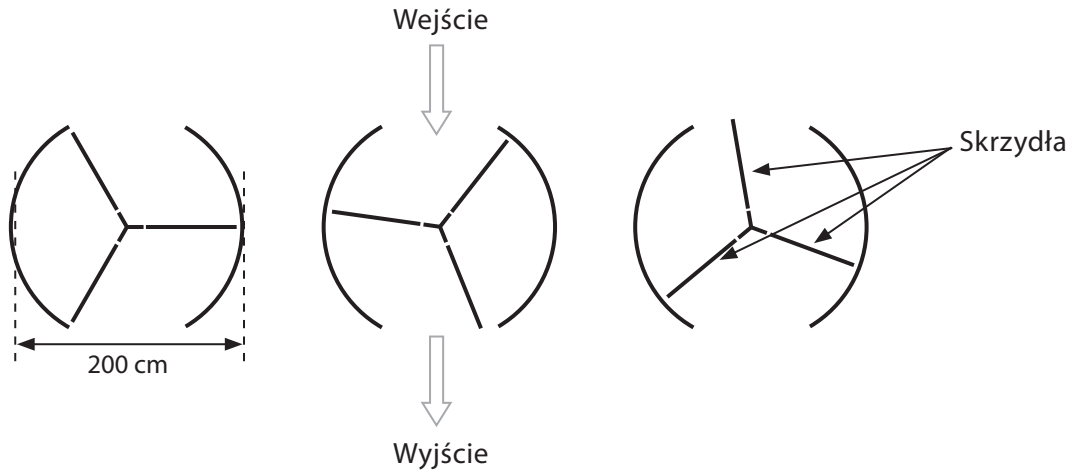
Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

Kod 9: Brak odpowiedzi.

DRZWI OBROTOWE

Drzwi obrotowe mają trzy skrzydła, które obracają się wewnątrz kolistej przestrzeni. Wewnętrzna średnica tej przestrzeni wynosi 2 metry (200 centymetrów). Trzy skrzydła dzielą tę przestrzeń na trzy równe części. Poniższy schemat pokazuje skrzydła drzwi w trzech różnych pozycjach widzianych z góry.



Pytanie 1: DRZWI OBROTOWE

PM995Q01 – 019

Ile stopni ma kąt utworzony przez dwa skrzydła tych drzwi?

Wielkość kąta:°

DRZWI OBROTOWE 1 – PUNKTACJA

Opis: Obliczenie kąta dla wycinka koła

Treści matematyczne: Przestrzeń i kształt

Kontekst: Naukowo-przyrodniczy

Proces: Zastosowanie

Łatwość: 512 punktów - poziom 3

Kredyt całkowity

Kod 1: 120. [akceptujemy kąt dopełniający: 240]

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

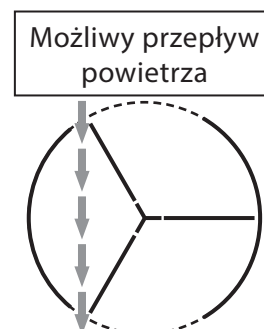
Kod 9: Brak odpowiedzi.

Pytanie 2: DRZWI OBROTOWE

PM995Q02 – 019

Dwa **otwory** drzwiowe (łuki zaznaczone na rysunku linią kropkowaną) mają tę samą wielkość. Jeśli otwory te będą zbyt szerokie, obracające się skrzydła nie będą w stanie odpowiednio zamknąć przestrzeni, a tym samym powietrze będzie mogło przepływać swobodnie między wejściem i wyjściem, co spowoduje niepożądaną utratę lub nadmiar ciepła. Zostało to pokazane na rysunku obok.

Jaka jest maksymalna długość łuku w centymetrach (cm) dla każdego z dwóch otworów drzwiowych, która nie pozwala na swobodny przepływ powietrza między wejściem a wyjściem?



Maksymalna długość łuku: cm

DRZWI OBROTOWE 2 – PUNKTACJA

Opis: Opis: Interpretacja geometrycznego modelu realnej sytuacji w celu obliczenia długości łuku

Treści matematyczne: Przestrzeń i kształt

Kontekst: Naukowo-przyrodniczy

Proces: Formułowanie

Łatwość: 561 punktów - poziom 4

Kredyt całkowity

Kod 1: Odpowiedzi w zakresie od 103 do 105.

Akceptujemy odpowiedzi obliczone jako 1/6 obwodu okręgu, np. $\frac{100\pi}{3}$

Akceptujemy także odpowiedź 100, ale tylko wtedy, gdy jest jasne, że ta odpowiedź wynika z użycia przybliżenia $\pi = 3$.

Uwaga: odpowiedź 100 bez obliczeń może wynikać ze zgadywania, że łuk jest taki sam, jak promień (długość jednego skrzydła drzwi)

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

• 209 [podana łączna długość obu otworów zamiast długości „każdego” otworu].

Kod 9: Brak odpowiedzi.

Pytanie 3: DRZWI OBROTOWE

PM995Q03

Drzwi wykonują 4 pełne obroty na minutę. W każdej z trzech części jest miejsce na co najwyżej dwie osoby.

Ile wynosi maksymalna liczba osób, które mogą wejść do budynku przez te drzwi w ciągu 30 minut?

- A 60
- B 180
- C 240
- D 720

DRZWI OBROTOWE 3 – PUNKTACJA

Opis: Wybranie potrzebnych informacji i skorzystanie z wieloetapowego modelowania w skomplikowanej sytuacji rzeczywistej

Treści matematyczne: Ilość

Kontekst: Naukowo-przyrodniczy

Proces: Formułowanie

Łatwość: 561 punktów - poziom 4

Kredyt całkowity

Kod 1: D. 720

Brak kredytu

Kod 0: Inne odpowiedzi.

Kod 9: Brak odpowiedzi.